Ueber

die ersten negativen Fusspunktflächen der Flächen zweiter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Friedrich Spencker

aus Gnoien in Meckl.-Schwerin.

Rostock.

Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.

1889.

Referent: Professor Dr. **Staude.**

Errichtet man in den Punkten einer ebenen Kurve die Senkrechten auf den Verbindungslinien dieser Punkte mit einem festen Punkte, so hüllen diese Geraden eine Kurve ein, die man die erste negative Fusspunktkurve der vorgelegten Kurve nennt. Den festen Punkt wollen wir den Pol der Fusspunktkurve nennen.

Der erste, der sich eingehender mit diesen Kurven beschäftigte, ist Tortolini [1]). Er behandelt die erste negative Fusspunktkurve der Ellipse in Bezug auf das Centrum als Pol und giebt eine Ableitung der Gleichung derselben. Diese Kurve ist bekannt unter dem Namen der Kurve des Talbot [2]), der eine Rectification derselben gegeben hat. Analog der Definition der ersten negativen Fusspunktkurve versteht man unter der ersten negativen Fusspunktfläche die Enveloppe der Ebenen, die in den Punkten einer vorgelegten ursprünglichen Fläche senkrecht stehen auf dem vom Pole nach den Punkten dieser Fläche gezogenen Radienvectoren. Von Cayley ist folgende Construction der Fläche gegeben:

Man lege durch den Pol eine Kugel, die die ursprüngliche Fläche berührt, verbinde den Pol mit dem Centrum und verlängere die Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Kugel. Dieser Schnittpunkt ist der Punkt der negativen Fusspunktfläche, der dem Berührungspunkte der Kugel mit der ursprünglichen Fläche entspricht. Da jeder

---

[1]) Raccolta scientifica di Roma, 1846; Annali di scienze etc. da B. Tortolini, Vol. VI, 1855.

[2]) Annales de Mathématiques, tome XIV, pag. 380.

Punkt der Fläche aufzufassen ist als Schnittpunkt dreier benachbarter Ebenen, so ist klar, dass dieser Punkt, der entsprechende Punkt der ursprünglichen Fläche und der Pol auf einer Kugel liegen müssen, die die letztere berührt.

Von dieser Construction ausgehend, leitet Cayley die Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche des Ellipsoides ab für den Fall, dass der Pol im Centrum liegt und giebt eine Discussion der Fläche. J. C. Malet bestimmte die Doppellinien und Cuspidallinie der Fläche bei beliebiger Lage des Poles.

W. Roberts[1]) gelangt zur Definition der negativen Fusspunktflächen, indem er von den positiven Fusspunktflächen ausgeht. Es sei O der Pol, P der Berührungspunkt einer Tangentialebene der ursprünglichen Fläche, P_1 der Fusspunkt des vom Pole auf diese Ebene gefällten Lothes, dann ist die Tangentenebene des geometrischen Ortes des Punktes P_1 in P_1 senkrecht zur Ebene POP_1 und die Spur dieser Ebene TP_1 in der Ebene POP_1 bildet mit OP_1 einen Winkel OP_1T, der gleich OPP_1 ist. Bestimmt man jetzt einen Punkt P_m in der Ebene OPP_1 so, dass $OP_m = (OP_1)^m\,(OP)^{1-m}$ ist und $\sphericalangle\, POP_m = mPOP_1$, so definiren diese Gleichungen die negative Fusspunktfläche erster Ordnung, wenn wir $m = -1$ setzen. Nimmt m einen beliebigen ganzen oder gebrochenen negativen Werth an, so ist durch diese Gleichungen die negative Fusspunktfläche höherer und auch von gebrochener Ordnung definirt.

Es sind dies die Arbeiten, die mit der folgenden Abhandlung zunächst in Berührung stehen. Die übrige ziemlich reichhaltige Litteratur über Fusspunktflächen beschäftigt sich hauptsächlich mit den Krümmungsverhältnissen und der Cubatur der Fläche. Die vorliegende Arbeit bestimmt zunächst allgemein die Ordnungs- und Klassen-

---

[1]) Annali di matematica, I. Serie, Bd. 4, 61, pag. 133.
Journal de mathématiques, Bd. 10, pag. 177.

zahl der negativen Fusspunktfläche einer beliebigen Fläche n^{ter} Ordnung, giebt dann eine analytische Darstellung der negativen Fusspunktflächen der Flächen 2ter Ordnung in Punkt und Ebenenkoordinaten und behandelt die gestaltlichen Verhältnisse mit besonderer Berücksichtigung der Bedingungen, unter welchen es möglich ist, dass gerade Linien auf der Fläche existiren.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Ordnung und Klasse der ersten negativen Fusspunktfläche einer Fläche n^{ten} Grades.

Um Ordnung und Klasse[1]) der ersten negativen Fusspunktfläche einer Fläche n^{ten} Grades allgemein zu bestimmen, gehen wir aus von den Beziehungen, die zwischen der ursprünglichen Fläche, ihrer Reciprokal- und inversen Fläche und der negativen Fusspunktfläche bestehen. Der Pol der reciproken Fläche und das Inversionscentrum sollen in den folgenden Betrachtungen mit dem Pol der ersten negativen Fusspunktfläche zusammenfallen.

Da die erste positive Fusspunktfläche der Ort der Fusspunkte der vom Pol auf die Tangentialebenen der ursprünglichen Fläche gefällten Senkrechten ist, so folgt, dass die erste positive Fusspunktfläche die inverse Fläche der Reciprokalfläche der ursprünglichen ist. Die ursprüngliche Fläche ist die erste positive Fusspunktfläche ihrer negativen Fusspunktfläche, und mithin ist die erste

---

[1]) Es findet sich in Salmon's „Analytische Geometrie des Raumes", II. Theil, Artikel 285, pag. 362, eine kurze Notiz, in der Ordnung und Klasse der Fläche allgemein bestimmt sind. Diese Formeln sind jedoch ohne Beweis gegeben und gelten nur für den Fall, dass die ursprüngliche Fläche keine Beziehung zur unendlich fernen Ebene hat.

[2]) Die Beziehung zwischen den inversen, reciproken und Fusspunktflächen ist eingehend erörtert in einer Abhandlung von T. A. Hirst „Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes". Annali di matematica. Serie I, Bd. 2, pag. 95.

negative Fusspunktfläche die Reciprokalfläche der inversen Fläche der ursprünglichen. Die Ordnung und Klasse der negativen Fusspunktfläche ist mithin bekannt, wenn wir die Ordnung und Klasse der inversen Fläche kennen, da die Klasse der inversen Fläche gleich der Ordnung der negativen Fusspunktfläche als ihrer Reciprokalfläche ist und die Ordnung der inversen gleich der Klasse der negativen Fusspunktfläche.

Die Ordnung der inversen Fläche.

Jedem Punkte der ursprünglichen Fläche entspricht eindeutig ein Punkt der inversen Fläche. Eine beliebige Gerade, die durch den Pol geht, schneidet die primitive Fläche in n Punkten und diesen Punkten entsprechen n Punkte der inversen Fläche, die auf derselben Geraden liegen. Legen wir durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so schneidet dieselbe die Fläche in einer Kurve n^{ten} Grades. Den n unendlich fernen Punkten dieser Kurve entspricht der Pol. Derselbe ist mithin ein n facher Punkt der inversen Kurve dieser Schnittkurve. Der Pol ist folglich ein n facher Punkt der Schnittkurve jeder Ebene, die durch den Pol geht mit der inversen Fläche, d. h. er ist ein n facher Punkt der inversen Fläche.

Die Gerade schneidet also die inverse Fläche im Allgemeinen in 2 n Punkten. Geht jedoch die ursprüngliche Fläche durch den imaginären Kugelkreis hindurch, so entsprechen den Punkten desselben wiederum Punkte der inversen Fläche, die im Unendlichen liegen, denn:

$\xi\,\eta\,\zeta$ seien die Koordinaten der Punkte der ursprünglichen Fläche,

$x\,y\,z$ die Koordinaten der entsprechenden Punkte der inversen Fläche,

dann ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

für den Pol als Koordinatenanfang.

Liegt der unendlich ferne Kugelkreis auf der ursprünglichen Fläche, so ist für die Punkte desselben

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

und mithin für die entsprechenden Punkte der inversen Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = \infty.$$

Ist also der unendlich ferne Kugelkreis eine εfache Kurve der ursprünglichen Fläche, so ist der Pol nur ein $(n - \varepsilon)$facher Punkt der inversen Fläche.

Ist ferner der Pol ein Punkt der ursprünglichen Fläche, so entspricht in jeder Schnittkurve durch den Pol demselben, angesehen als Punkt der ursprünglichen Fläche, ein Punkt im Unendlichen auf der inversen Kurve.

Dieser Punkt liegt in der Richtung der Tangente im Pol an der ursprünglichen Kurve und folglich nicht auf der beliebig durch den Pol gezogenen Geraden.

Die Ordnung erniedrigt sich also um σ', wenn der Pol ein σ'facher Punkt der ursprünglichen Fläche ist.

Die Ordnung der inversen Fläche ist mithin:

$$n' = 2n - \varepsilon - \sigma'.$$

Die Klasse der inversen Fläche.

Die Klasse der ursprünglichen Fläche sei gleich ν. Jede Tangentenebene der ursprünglichen Fläche, die durch den Pol geht, ist auch Tangentenebene der inversen Fläche. Ist OA eine Gerade, die durch den Pol O hindurch geht, so sind die ν Tangentenebenen, die durch OA an die ursprüngliche Fläche gelegt werden können, auch Tangentenebenen der inversen Fläche.

Die Ordnung des von O aus an die ursprüngliche Fläche gelegten Tangentenkegels sei gleich a, dann ist die Berührungskurve dieses Kegels eine Kurve a^{ter} Ordnung. Man erhält die Tangentenebenen der ursprünglichen Fläche, die durch OA gehen, wenn man durch OA Ebenen legt, die die Berührungskurve tangieren. Die Berührungskurve

des Tangentenkegels der inversen Fläche, dessen Spitze in O liegt, ist die inverse Kurve der Berührungskurve des ursprünglichen Tangentenkegels. Dieselbe besitzt in O einen afachen Punkt, es können also a Tangenten construirt werden, welche diese Kurve im Punkte O berühren. Durch die Gerade OA sind mithin $\nu + 2a$ Ebenen zu legen, die diese Kurve berühren.

Der unendlich ferne Kugelkreis ist eine nfache Kurve der inversen Fläche. An ihn können wir durch OA 2 Tangentenebenen legen, und jede derselben ist nfach zu zählen. Die Klasse der inversen Fläche ist also gleich

$$\nu + 2a + 2n^{1}),$$

wenn die ursprüngliche Fläche keine Beziehung zur unendlich fernen Ebene hat.

Geht die ursprüngliche Fläche jedoch εfach durch den imaginären Kugelkreis, so ist derselbe nur eine $(n - \varepsilon)$fache Kurve der inversen Fläche. Die Klasse der letzteren erniedrigt sich also um 2ε. Ist ferner der Pol ein σ'facher Punkt der ursprünglichen Fläche, so ist die Ordnung des von ihm an die ursprüngliche Fläche gelegten Tangentenkegels gleich $a - \sigma'$. Von der Klasse ist mithin noch $2\sigma'$ abzuziehen. Berührt die unendlich ferne Ebene die ursprüngliche Fläche σfach, so fallen in jeder Schnittkurve durch O σ Punkte im Unendlichen zusammen. Die Tangentenebenen an dem unendlich fernen Kugelkreis sind deshalb nur $2n - \sigma$fach zu zählen.

Die Klasse der inversen Fläche ist mithin:

$$\nu' = 2n + 2a + \nu - 2(\varepsilon + \sigma') - \sigma.$$

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich für die Ordnung und Klasse der negativen Fusspunktfläche einer Fläche n^{ten} Grades, die εfach durch den unendlich fernen Kugelkreis hindurchgeht, die die unendlich

[1]) Am angegebenen Orte bestimmt Salmon die Klasse der inversen Fläche gleich $\nu + a + 2n$. Das Fehlen des Factors 2 hält Verfasser für einen Druckfehler.

ferne Ebene σfach berührt und den Pol als σ'fachen Punkt besitzt, die Formeln:

$$n_1 = 2n + 2a + \nu - 2(\varepsilon + \sigma') - \sigma^1)$$
$$\nu_1 = 2n - \varepsilon - \sigma'.$$

Wenden wir diese Formeln auf die Flächen 2ten Grades an, so erhalten wir:

a. Für die centrischen Flächen, 1. wenn der Pol ausserhalb der ursprünglichen Fläche liegt $\left\{\begin{array}{l} n = 10 \\ \nu = 4. \end{array}\right.$

2. wenn der Pol auf der Fläche liegt $\left\{\begin{array}{l} n = 8 \\ \nu = 3. \end{array}\right.$

b. Für die nicht centrischen Flächen:

1. wenn der Pol ausserhalb der ursprünglichen Fläche liegt $\left\{\begin{array}{l} n = 9 \\ \nu = 4 \end{array}\right.$

2. wenn der Pol auf der Fläche liegt $\left\{\begin{array}{l} n = 7 \\ \nu = 3. \end{array}\right.$

Für die Ordnung und Klasse der ersten negativen Fusspunktkurven giebt Salmon[2]) folgende Formeln:

$$n_1 = \nu + 2n - 2(\varepsilon + \sigma') - (\varepsilon' + \sigma) + \pi_0 + \pi;$$
$$\nu_1 = 2n - \varepsilon - \sigma'.$$

In diesen Formeln bedeuten ε und σ, wie viel mal die ursprüngliche Fläche durch einen der imaginären Kreispunkte geht und wie viel mal sie die unendlich ferne Gerade berührt, ε' σ' die Zahl der Berührungen der Kurve mit einer der Verbindungslinien des Poles mit den unendlich fernen Kreispunkten und die Vielfachheit

---

[1]) cf. Sturm „Ueber Fusspunktkurven und -Flächen, Normalen und Normalebenen", Mathematische Annalen Bd. 6, 1873, pag. 249. „Die Klasse der Fusspunktsflächen allgemein zu ermitteln, ist mir noch nicht gelungen. Es ist nun aber überaus wahrscheinlich, dass die Klasse m' von Σ ebenso wie die Ordnung und der Rang, sich sehr einfach durch m, ν, n ausdrücken lässt."

[2]) „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven", Art. 123, pag. 135.

des Hindurchgehens durch den Pol, π_0 und π_1 die Zahl der zusammenfallenden Tangentenpaare für einen vielfachen Punkt im Pol.

Aus diesen Formeln erhält man für die Ordnung und Klasse der ersten negativen Fusspunktkurven der Kegelschnitte folgende Zahlen:

a. Der Pol liege ausserhalb der Kurve:

$$\text{Ellipse und Hyperbel} \begin{cases} n = 6 \\ \nu = 4 \end{cases}$$

$$\text{Parabel} \begin{cases} n = 5 \\ \nu = 4. \end{cases}$$

b. Der Pol liege auf der Kurve:

$$\text{Ellipse Hyperbel} \begin{cases} n = 4 \\ \nu = 3 \end{cases}$$

$$\text{Parabel} \begin{cases} n = 3 \\ \nu = 3. \end{cases}$$

Zweiter Abschnitt.

Die erste negative Fusspunktfläche der centrischen Flächen 2ten Grades.

I. Analytische Darstellung der Fläche.

§ 1. Die Gleichung in Punktkoordinaten.

a. Ableitung von Roberts[1]).

Die Bildung der Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche lässt sich zurückführen auf das Problem, die Gleichung der Parallelfläche derselben ursprünglichen Fläche aufzustellen.

Bezeichnen wir mit $\xi\ \eta\ \zeta$ die Koordinaten der Punkte der ursprünglichen Fläche, so ist die Parallelfläche die Enveloppe der Kugel

$$2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$$

wo k der Modul der Parallelfläche ist.

Die Gleichung der Ebene, deren Enveloppe die gesuchte Fläche ist, hat die Form:

$$\xi(x + x') + \eta(y + y') + \zeta(z + z') = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + x x' + y y' + z z' = 0$$

wenn $x' y' z'$ die Koordinaten des Poles sind.

Bei der Bildung der Gleichung der Enveloppe sind x y z als Konstante zu behandeln und es folgt hieraus, dass die Gleichung der negativen Fusspunktfläche aus der

[1]) Annali di matematica tomo 4. 1861 pag. 154.

Gleichung der Parallelfläche hervorgeht, indem man statt x y z k^2 in die letztere

$$\frac{1}{2}(x+x') \quad \frac{1}{2}(y+y') \quad \frac{1}{2}(z+z')$$

$$\frac{1}{4}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]$$

einsetzt.

Ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der ursprünglichen Fläche, so erhalten wir die Gleichung der negativen Fusspunktfläche in folgender Form:

$$4\left(4\,\Delta\,\Delta_1-\Theta\,\Theta_1+\frac{\Omega^2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\left[72\,\Delta\,\Delta_1\,\Omega+9\,\Theta\,\Theta_1\,\Omega\right.$$
$$\left.-27\,\Delta\,\Theta_1^2-27\,\Delta_1\,\Theta^2-2\,\Omega^3\right]^2$$

Wo bedeutet

$$\Delta=\frac{1}{4}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Delta'=\frac{1}{a^2\,b^2\,c^2}$$

$$\Theta=\frac{1}{4}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{(x+x')^2}{a^2}+\frac{(y+y')^2}{b^2}+\frac{(z+z')^2}{c^2}\right]$$

$$\Theta'=-\frac{1}{a^2\,b^2\,c^2}\left[x\,x'+y\,y'-(a^2+b^2+c^2)\right]$$

$$\Omega=\frac{1}{4\,b^2\,c^2}\left[(x-x')^2-(y\,y'+z\,z')\right]+\frac{1}{4\,a^2\,c^2}\left[(y-y')^2\right.$$
$$\left.-(x\,x'+z\,z')\right]+\frac{1}{4\,a^2\,b^2}\left[(z-z')^2-(x\,x'+y\,y')\right]$$
$$+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

b. Ableitung von Cayley.[1])

Sind $\xi\ \eta\ \zeta$ wie vorhin die Koordinaten der Punkte der ursprünglichen Fläche, x y z die Koordinaten der Punkte der negativen Fusspunktfläche, so ergeben sich aus der punktweisen Construction der Fläche für x y z die Ausdrücke:

$$x = \xi\left(2 - \frac{t}{a^2}\right) \qquad y = \eta\left(2 - \frac{t}{b^2}\right) \qquad z = \zeta\left(2 - \frac{t}{c^2}\right)$$

$$t = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

wenn der Pol mit dem Centrum der Fläche 2ten Grades zusammenfällt.

Die Gleichung der Ebene, deren Enveloppe die Fläche ist, hat die Form

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die Gleichung der ursprünglichen Fläche sei

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe für $\xi\ \eta\ \zeta$, wie sie aus obigen Ausdrücken bestimmt werden, ein, so erhalten wir:

$$\frac{x^2}{2 - \frac{t}{a^2}} + \frac{y^2}{2 - \frac{t}{b^2}} + \frac{z^2}{2 - \frac{t}{c^2}} = t.$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(2 - \frac{t}{a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(2 - \frac{t}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(2 - \frac{t}{c^2}\right)} = 1.$$

Die zweite Gleichung entsteht durch Differentiation der ersten Gleichung nach t.

Die Gleichung der Fläche ist also darstellbar als Diskriminante der ersten Gleichung. Diese Diskriminante enthält x y z im 10. Grade.

Diese Ableitung ist jedoch nur dann anwendbar, wenn der Pol mit dem Centrum der Fläche 2ten Grades zu-

[1]) Annali di matematica tomo 2, 1859, pag. 168.

sammenfällt, da nur in diesem Falle die 2te Gleichung durch Differentiation nach einem Parameter t erhalten wird.

Hat der Pol eine ganz beliebige Lage, so kann man sich mit Vortheil folgender Ableitung bedienen.

c. Ableitung für beliebige Lage des Poles.

Die Koordinaten des Poles seien $x' y' z'$.

Um zur Gleichung der negativen Fusspunktfläche zu gelangen, stellen wir zunächst die Gleichung auf für den Ort des Mittelpunktes der Kugel, welche durch den Pol hindurchgeht und die ursprüngliche Fläche berührt. Sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Koordinaten dieses Punktes, so erhalten wir die Gleichung unserer Fläche, wenn wir für $\alpha\ \beta\ \gamma$

$$\frac{x+x'}{2} \qquad \frac{y+y'}{2} \qquad \frac{z+z'}{2}$$

in die Gleichung des Ortes einsetzen, da $\alpha\ \beta\ \gamma$ der Halbirungspunkt ist der Verbindungslinie des Poles mit dem entsprechenden Punkte der negativen Fusspunktfläche.

Wir verlegen den Koordinatenanfang in den Pol. Die Gleichung der Kugel ist dann:

$$U \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0$$

$$U \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

Die Koordinatenebenen seien parallel den Hauptebenen der Fläche 2ten Grades.

Die Gleichung der ursprünglichen Fläche hat dann die Form:

$$V = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

Denken wir uns die Gleichungen homogen gemacht, so sind die Bedingungen der Berührung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \lambda \frac{\partial V}{\partial z} \quad \frac{\partial U}{\partial w} = \lambda \frac{\partial V}{\partial w}$$

d. h.:

$$1.\ a_{11}x + a_{14} = \lambda(x-\alpha) \qquad a_{22}y + a_{24} = \lambda(y-\beta)$$

$$a_{33}z + a_{34} = \lambda(z-\gamma)$$

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = -\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Die Koordinaten x y z müssen den Gleichungen $U = 0$ $V = 0$ genügen. Genügen sie einer der beiden Gleichungen, so genügen sie auch der andern, da

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial x} + w\frac{\partial U}{\partial w} = 2U$$

ist und mithin nach Gleichungssystem 1 gleich $2\lambda V$.

Die Gleichungen 1 ergeben für x y z die Ausdrücke:

$$x = \frac{\lambda\alpha + a_{14}}{\lambda - a_{11}} \qquad y = \frac{\lambda\beta + a_{24}}{\lambda - a_{22}} \qquad z = \frac{\lambda\gamma + a_{34}}{\lambda - a_{33}}.$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen $U = 0$ und

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = -\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z,$$

so erhält man für λ die Bedingungsgleichungen:

$$2. \quad \frac{(\lambda\alpha + a_{14})^2}{\lambda - a_{11}} + \frac{(\lambda\beta + a_{24})^2}{\lambda - a_{22}} + \frac{(\lambda\gamma + a_{34})^2}{\lambda - a_{33}} + a_{44} = 0.$$

$$3. \quad \frac{(\lambda\alpha + a_{14})^2}{(\lambda - a_{11})^2} + \frac{(\lambda\beta + a_{24})^2}{(\lambda - a_{22})^2} + \frac{(\lambda\gamma + a_{34})^2}{(\lambda - a_{33})^2} - \frac{2\alpha(\lambda\alpha + a_{14})}{\lambda - a_{11}} - \frac{2\beta(\lambda\beta + a_{24})}{\lambda - a_{22}} - \frac{2\gamma(\lambda\gamma + a_{34})}{\lambda - a_{33}} = 0.$$

Eliminieren wir λ aus diesen Gleichungen, so erhalten wir die Gleichung des Ortes für den Mittelpunkt der Kugel. Gleichung 3 wird aber aus Gleichung 2 durch Differentiation nach λ erhalten. Mithin kommt die Bildung der gesuchten Gleichung darauf hinaus, die Diskriminante der Gleichung 2 zu bilden. Gleichung 2 ist in λ vom 4ten Grade, nämlich:

$$\begin{aligned}
&\lambda^4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \lambda^3\big[2(\alpha a_{14} + \beta a_{24} + \gamma a_{34}) - \alpha^2(a_{22} + a_{33}) \\
&\quad - \beta^2(a_{11} + a_{22}) - \gamma^2(a_{11} + a_{22}) + a_{44}\big] + \lambda^2\big[\alpha^2 a_{22} a_{33} \\
&\quad + \beta^2 a_{11} a_{33} + \gamma^2 a_{11} a_{22} - 2\alpha a_{14}(a_{22} + a_{33}) - 2\beta a_{24}(a_{11} + a_{33}) \\
&\quad - 2\gamma(a_{11} + a_{22}) - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) a_{44} + a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\big] \\
&\quad + \lambda\big[2\alpha a_{14} a_{22} a_{33} + 2\beta a_{11} a_{33} a_{24} + 2\gamma a_{34} a_{11} a_{22} \\
&\quad - a_{14}^2(a_{22} + a_{33}) - a_{24}^2(a_{11} + a_{33}) - a_{34}^2(a_{11} + a_{22}) \\
&\quad + a_{44}(a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33})\big] + a_{14}^2 a_{22} a_{33} + a_{24}^2 a_{11} a_{33} \\
&\quad + a_{34}^2 a_{11} a_{22} - a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 0
\end{aligned}$$

oder in abgekürzter Bezeichnung

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Omega + \lambda \Theta_1 + \Delta_1 = 0.$$

Die Ausdrücke $\Delta\, \Theta\, \Omega$ sind in $\alpha\, \beta\, \gamma$ vom 2ten Θ_1 vom 1ten Grade und Δ_1 ist eine Konstante.

Da die Diskriminante einer binären Form 4ten Grades in die Form gebracht werden kann:

$$4\left[4\,\Delta\,\Delta_1 - \Theta\,\Theta_1 - \frac{\Omega^3}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}\left[72\,\Delta\,\Delta_1\,\Omega + 9\,\Theta\,\Theta_1\,\Omega - 27\,\Delta\,\Theta_1^2 - 27\,\Delta_1\,\Theta^2 - 2\,\Omega^3\right]^2,$$

so sieht man, dass die Gleichung des Ortes des Mittelpunktes der Kugel vom 10ten Grade ist. Durch die lineare Transformation

$$\alpha = \frac{x}{2} \qquad \beta = \frac{y}{2} \qquad \gamma = \frac{z}{2}$$

wird der Grad der Gleichung nicht geändert. Wir finden also in Uebereinstimmung mit den früher erhaltenen Resultaten, dass die negative Fusspunktfläche der centrischen Flächen 2ten Grades eine Fläche 10ter Ordnung ist, wenn der Pol ausserhalb der ursprünglichen Fläche liegt.

Liegt der Pol auf der ursprünglichen Fläche, so wird in den obigen Gleichungen $a_{44} = 0$. Die Gleichung 4ten Grades in λ erleidet dadurch keine wesentliche Veränderung. Es verschwindet keiner der Koeffizienten $\Delta\, \Theta\, \Omega\, \Theta_1\, \Delta_1$ und auch der Grad derselben in x y z erniedrigt sich nicht. Die resultirende Gleichung ist mithin auch in diesem Falle vom 10ten Grade. Die allgemeine Formel für die Ordnung der negativen Fusspunktfläche ergab jedoch für den Fall, dass der Pol auf der ursprünglichen Fläche lag, $n_1 = 8$. Dieser scheinbare Widerspruch ist auf folgende Weise zu erklären:

d. Vergleichung mit den Resultaten des 1. Abschnittes.

Bei der Ableitung der allgemeinen Formel betrachteten wir die erste negative Fusspunktfläche als Reciprokalfläche

der inversen der ursprünglichen Fläche. Ist nun der Pol ein Punkt der primitiven Fläche, so ist die Tangentialebene derselben im Pole eine Asymptotenebene der inversen Fläche. Alle Punkte der letzteren, die den Punkten der primitiven Fläche entsprechen, die unendlich nahe dem Pole liegen, liegen im Unendlichen und unendlich nahe der Tangentialebene im Pole. Auf der Reciprokalfläche und mithin auf der negativen Fusspunktfläche entspricht also dem Pole, aufgefasst als Punkt der ursprünglichen Fläche, der unendlich ferne Punkt der Normalen im Pole. Bei der Ableitung der Gleichung der Fläche gingen wir aus von der punktweisen Construction derselben. Liegt aber der Pol auf der ursprünglichen Fläche und fällt jetzt der Berührungspunkt der letzteren mit der Kugel in den Pol, so ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt der Kugel für diesen Fall die Normale selber in ihrer ganzen Ausdehnung. Die Normale ist also nach dieser Construction als zur Fläche gehörig zu betrachten. Dasselbe lehren die Gleichungen 1, 2, 3. Das Gleichungssystem 1 geht für

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

über in:

$$1a. \quad \frac{\lambda\alpha + a_{14}}{\lambda - a_{11}} = 0 \qquad \frac{\lambda\beta + a_{24}}{\lambda - a_{22}} = 0 \qquad \frac{\lambda\gamma + a_{34}}{\lambda - a_{33}} = 0.$$

Diese Gleichungen sind nur dann erfüllt, wenn

$$\lambda = -\frac{a_{14}}{\alpha} = -\frac{a_{27}}{\beta} = -\frac{a_{34}}{\gamma}$$

ist.

Die Koordinaten $\alpha\,\beta\,\gamma$ genügen also den Gleichungen

$$\frac{\alpha}{a_{14}} = \frac{\beta}{a_{24}} = \frac{\gamma}{a_{34}}$$

d. h. der Mittelpunkt der berührenden Kugel liegt auf der Normalen der ursprünglichen Fläche, die durch den Pol geht. Die entsprechenden Punkte der negativen Fuss-

punktfläche liegen ebenfalls auf dieser Normalen, da die Koordinaten derselben

$$x = 2\alpha \qquad y = 2\beta \qquad z = 2\gamma$$

sind. Da aber für alle Werthe von $\alpha\,\beta\,\gamma$, die den Gleichungen der Normale im Pole genügen, die Gleichungen 2 und 3 identisch, d. h. für jeden endlichen und unendlichen Werth von λ erfüllt sind, so folgt hieraus, dass die Normale in ihrer ganzen Ausdehnung als zur Fläche gehörig zu betrachten ist.

Gehen wir aus von der Definition der Fläche als Enveloppe der Ebenen, die senkrecht auf den vom Pole nach den Punkten der ursprünglichen Fläche gezogenen Radienvectoren stehen, so gehen diese, wenn sich die entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche dem Pole nähern, in Tangenten über. Fallen dieselben mit dem Pole zusammen, so gehen die Ebenen über in Normalebenen. Sie bilden ein Ebenenbüschel, das die Normale im Pole als Basis besitzt, d. h. diese Normale wird von ihnen eingehüllt. Es ergiebt sich also auch aus dieser Definition, dass die Normale im Pole als zur Fläche gehörig zu betrachten ist.

Die Definition der Fläche als Reciprokalfläche der inversen der ursprünglichen Fläche deckt sich also nicht ganz mit der Definition der Fläche als Enveloppe von Ebenen.

b. Specialfall der Kegelfläche.

Es bleibt noch übrig von den centrischen Flächen, den Kegel zu behandeln. Die Bedingung, dass eine Gleichung 2ten Grades

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

einen Kegel darstellt, ist gegeben durch das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

oder da in unsern Gleichungen

$$a_{12} = 0 \qquad a_{13} = 0 \qquad a_{23} = 0$$

ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Entwickeln wir diese Determinante, so erhalten wir die Bedingung:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} - a_{11}\, a_{33}\, a_{24}^2 - a_{11}\, a_{22}\, a_{34}^2 - a_{22}\, a_{33}\, a_{14}^2 = 0.$$

Der Ausdruck links ist gleich Δ_1. Wir erhalten mithin die Gleichung der negativen Fusspunktfläche des Kegels, indem wir die Diskriminante bilden der Gleichung

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Omega + \lambda \Theta_1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich der Factor λ abscheiden.

Die Diskriminante einer Gleichung $\lambda F(\lambda) = 0$ besteht jedoch aus 2 Factoren, der eine Factor ist das Eliminationsproduct aus $F(\lambda)$ und $F'(\lambda)$. Der zweite Factor ist

$$\Big[F(\lambda)\Big]^2_{\lambda=0}.$$

Die erste negative Fusspunktfläche eines Kegels 2ter Ordnung besteht also aus 2 Flächen. Die Gleichung der einen Fläche wird erhalten, indem man λ eliminirt aus den Gleichungen

$$\lambda^3 \Delta + \lambda^2 \Theta + \lambda \Omega + \Theta_1 \text{ und } 3\lambda^2 \Delta + 2\lambda \Theta + \Omega = 0.$$

Dies giebt eine Gleichung 8ten Grades. Die andere Fläche ist $\Theta_1^2 = 0$.

Die negative Fusspunktfläche eines Kegels 2ter Ordnung zerfällt mithin bei beliebiger Lage des Poles in eine Fläche 8ter Ordnung und in eine Doppelebene.

Besonderes Interesse bietet der Fall, dass der Pol mit dem Scheitel des Kegels zusammenfällt. Die Gleichung des Kegels lautet dann

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0.$$

Die Gleichung 4ten Grades in λ nimmt die Form an:

$$\lambda^2\{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \lambda[-\alpha^2(a_{22}+a_{33}) - \beta^2(a_{11}+a_{33}) - \gamma^2(a_{11}+a_{22})] + a_{22}a_{33}\alpha^2 + a_{11}a_{33}\beta^2 + a_{11}a_{22}\gamma^2\} = 0.$$

Die negative Fusspunktfläche besteht in diesem Falle aus dem dreifach zu zählenden Kegel

$$a_{22}a_{33}x^2 + a_{11}a_{33}y^2 + a_{11}a_{22}z^2 = 0$$

und der Fläche 4ten Grades:

$$4(x^2+y^2+z^2)(a_{22}a_{33}x^2 + a_{11}a_{33}y^2 + a_{11}a_{22}z^2) - [(a_{22}+a_{33})x^2 + (a_{11}+a_{33})y^2 + (a_{11}+a_{22})z^2]^2 = 0.$$

Die Gleichung 4ten Grades zerfällt in 4 lineare Factoren von der Form:

$$(a_{22}-a_{33})^{1/2}x + (a_{11}-a_{33})^{1/2}y + (a_{11}-a_{22})^{1/2}z = 0.$$

Die Fläche 4ten Grades zerfällt also in 4 Ebenen. Wir haben mithin folgendes Resultat gefunden:

„Die erste negative Fusspunktfläche eines Kegels 2ter Ordnung besteht aus einer Doppelebene und einer Fläche 8ter Ordnung, wenn der Pol ausserhalb der Fläche liegt. Liegt der Pol im Scheitel, so besteht die Fläche aus einem dreifach zu zählenden Kegel 2ter Ordnung und 4 Ebenen."

§ 2. Die Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten.

Wir gehen wiederum aus von der Gleichung der Fläche 2ten Grades in der Form:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Die Gleichung der Ebene, deren Enveloppe die negative Fläche ist, sei

$$ux+vy+wz+1=0.$$

Die Gleichung einer Geraden, die durch den Koordinatenanfang, den wir in den Pol verlegen wollen, geht, und die senkrecht steht auf der Ebene, ist:

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}.$$

Der Fusspunkt dieser Geraden in der Ebene

$$ux+vy+wz+1=0$$

muss der Gleichung der ursprünglichen Fläche genügen. Aus den Gleichungen der Ebene und der Geraden erhalten wir die Ausdrücke:

$$x=\frac{-u}{u^2+v^2+w^2}\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2+w^2}\quad z=\frac{-w}{u^2+v^2+w^2}$$

Setzen wir diese Werthe ein in die Gleichung der ursprünglichen Fläche, so erhalten wir die Gleichung der negativen Fusspunktfläche in Ebenenkoordinaten in folgender Form:

$$a_{44}(u^2+v^2+w^2)^2-2(u^2+v^2+w^2)(a_{14}u+a_{24}v+a_{34}w)$$
$$+a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2=0.$$

Diese Gleichung ist in u v w vom 4ten Grade. Sie lehrt in Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultate, dass die Klasse unserer Fläche gleich 4 ist, wenn der Pol ausserhalb der ursprünglichen Fläche liegt.

Liegt der Pol auf der ursprünglichen Fläche, so wird $a_{44}=0$, die Klasse der Fläche mithin nur gleich 3. Um zu untersuchen, welche Bedeutung das Verschwinden des

Koeffizienten a_{44} hat, führen wir Polarkoordinaten ein:

$$u = \frac{\cos\alpha}{p} \quad v = \frac{\cos\beta}{p} \quad w = \frac{\cos\gamma}{p}.$$

Die Gleichung der Fläche nimmt die Form an:

$$a_{44} - 2(a_{14}\cos\alpha + a_{24}\cos\beta + a_{34}\cos\gamma)p$$
$$+ (a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma)p^2 = 0.$$

Wird $a_{44} = 0$, so ist p ein Factor der Gleichung und mithin $p = 0$ eine Wurzel, während $\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$ beliebige Werthe annehmen können. Da die vom Pole ausgehenden Radienvectoren in Tangenten übergehen, wenn die entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche sich dem Pole nähern, so sieht man, dass dem Werthe $p = 0$ ein Ebenenbüschel entspricht, dessen Basis die Normale im Pole ist. Mithin zeigt auch die Gleichung in Ebenenkoordinaten, dass diese Normale zur Fläche gehört.

§ 3. Parameterdarstellung.

Aus der Definition der Fläche als geometrischer Ort des Endpunktes desjenigen Durchmessers der berührenden Kugel, der durch den Pol hindurchgeht, folgt eine einfache Parameterdarstellung für die Koordinaten der Punkte der Fläche.

$$f(\xi\,\eta\,\zeta) = 0$$

sei die Gleichung der ursprünglichen Fläche.

Die cos der Richtungswinkel der Normalen derselben sind:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\lambda,\ \frac{\partial f}{\partial \eta}\lambda,\ \frac{\partial f}{\partial \zeta}\lambda,\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}}$$

r sei der Radius der Kugel, $\alpha\beta\gamma$ die Koordinaten ihres Mittelpunktes, dann ist

$$\alpha = \xi + r\lambda\frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \beta = \eta + r\lambda\frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \gamma = \zeta + r\lambda\frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Bezeichnen wir mit w den Winkel, den die Normale mit dem vom Pole nach dem entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche gezogenen Radiusvector bildet, so ist

$$r = \frac{\sqrt{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}}{2\cos w}$$

und es ist:

$$\cos w = \frac{(\xi-x')\frac{\partial f}{\partial \xi}+(\eta-y')\frac{\partial f}{\partial \eta}+(\zeta-z')\frac{\partial f}{\partial \zeta}}{\sqrt{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}} \cdot \lambda.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\alpha = \xi - \frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}{(\xi-x')\frac{\partial f}{\partial \xi}+(\eta-y')\frac{\partial f}{\partial \eta}+(\zeta-z')\frac{\partial f}{\partial \zeta}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\beta = \eta - \frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}{(\xi-x')\frac{\partial f}{\partial \xi}+(\eta-y')\frac{\partial f}{\partial \eta}+(\zeta-z')\frac{\partial f}{\partial \zeta}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\gamma = \zeta - \frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}{(\xi-x')\frac{\partial f}{\partial \xi}+(\eta-y')\frac{\partial f}{\partial \eta}+(\zeta-z')\frac{\partial f}{\partial \zeta}} \cdot \frac{\partial f}{\zeta}$$

Für die Punkte der negativen Pusspunktfläche finden wir jetzt:

$$x = 2\alpha - x'$$
$$y = 2\beta - y'$$
$$z = 2\gamma - z'$$

Für $\xi\,\eta\,\zeta$ kann jetzt eine beliebige Parameterdarstellung eingeführt werden. Die gegebene Ableitung ist gültig für jede beliebige ursprüngliche Fläche.

II. Die Gestalt der Fläche.

§ 1. Das Verhalten im Unendlichen.

Um uns ein Bild von der Gestalt der Fläche zu machen, wollen wir zunächst untersuchen, ob die Fläche reelle Punkte im Unendlichen besitzt.

Ueber diese Frage giebt uns die Parameterdarstellung Aufschluss.

Legen wir

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

als Gleichung der ursprünglichen Fläche zu Grunde, so nimmt die Parameterdarstellung die Form an:

$$x=\xi\left(2-\frac{Q}{a^2}\right)-x'$$

$$y=\eta\left(2-\frac{Q}{b^2}\right)-y'$$

$$z=\zeta\left(2-\frac{Q}{c^2}\right)-z'$$

$$Q=\frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}{(\xi-x')\frac{\xi}{a^2}+(\eta-y')\frac{\eta}{b^2}+(\zeta-z')\frac{\zeta}{c^2}}.$$

Der Pol $x'y'z'$ möge ausserhalb der ursprünglichen Fläche liegen.

Der Ausdruck im Nenner von Q hat die Form der Gleichung der Polarebene des Poles in Bezug auf die ursprüngliche Fläche. Liegt der Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ in dem Schnitte dieser Ebene mit der ursprünglichen Fläche, d. h. auf der Berührungskurve des vom Pole an die Fläche 2ten Grades gelegten Tangentenkegels, so verschwindet der Ausdruck im Nenner von Q. Q wird unendlich gross, d. h. der entsprechende Punkt der negativen Fusspunktfläche wird ein unendlich ferner Punkt. Durch die Berührungskurve des von $x'y'z'$ an die primitive Fläche gelegten Tangentenkegels werden die Punkte der ursprünglichen Fläche in zwei verschiedene Gebiete getheilt. Das dem Pole zunächst liegende Gebiet werde mit A, das andere mit B bezeichnet. Die dem Gebiete A entsprechenden Punkte der negativen Fusspunktfläche bilden ein zusammenhängendes Continuum von Punkten, das sich

ins Unendliche erstreckt und ebenso die dem Gebiete B entsprechenden Punkte. Die negative Fusspunktfläche besteht also in diesem Falle aus 2 getrennten Schalen.

Da diejenigen Punkte unserer Fläche, die der Berührungskurve entsprechen, im Unendlichen liegen und zwar in den Ebenen, die senkrecht stehen auf den Erzeugenden des Tangentenkegels, so folgt, weil x y z stetig wachsen, wenn $\xi\,\eta\,\zeta$ sich der Berührungskurve nähert, dass diese Ebenen Asymptotenebenen der Fläche sind. Die von ihnen gebildete abwickelbare Fläche ist mithin Asymptotenfläche.

Wir haben also folgendes Resultat gefunden:

„Liegt der Pol ausserhalb der Fläche 2ten Grades, so dass von ihm aus ein reeller Tangentenkegel an dieselbe gelegt werden kann, so besitzt die negative Fusspunktfläche eine abwickelbare Fläche als Asymptotenfläche, deren Erzeugenden senkrecht stehen auf den Erzeugenden des Tangentenkegels."

Verbindet man alle Punkte des Gebietes B mit dem Pole, so schneiden diese Radienvectoren die ursprüngliche Fläche auch in Punkten, die zum Gebiete A gehören. Zu jedem Radiusvector gehören also 2 parallele Tangentenebenen der negativen Fusspunktfläche, die je eine Schale der Fläche berühren. Nähern wir uns auf einem bestimmten Wege der Berührungskurve des Tangentenkegels, so nähern sich die entsprechenden Punkte der negativen Fusspunktfläche asymptotisch der Ebene, senkrecht auf dem betreffenden Radiusvector, wie das stetige Wachsen der Function Q angiebt. Wird die Berührungskurve überschritten, so ändert der Nenner in Q sein Zeichen, denn:

Der Ausdruck

$$1-\left(\frac{\xi\,x'}{a^2}+\frac{\eta\,y'}{b^2}+\frac{\zeta\,z'}{c^2}\right)$$

ist proportional der vom Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ auf die Polarebene gefällten Senkrechten. Die Richtung dieser Senkrechten ist verschieden für Punkte auf verschiedenen Seiten der

Polarebene. Haben wir auf der einen Seite das Loth positiv gerechnet, so ist es auf der andern Seite negativ zu rechnen. Der obige Ausdruck muss also für Punkte, die auf verschiedenen Seiten der Polarebene liegen, verschiedenes Zeichen haben. In unserm Falle ist der obige Ausdruck negativ für diejenigen Punkte, die auf derselben Seite der Polarebene liegen wie der Pol, da er für

$$\xi = x' \qquad \eta = y' \qquad \zeta = z'$$

die Form annimmt

$$1 - \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}$$

und

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} > 1$$

ist.

Bei dem Ueberschreiten der Berührungskurve gehen also die Werthe von $x\,y\,z$ von $+\infty$ in $-\infty$ über oder umgekehrt, d. h. die Fläche kehrt in entgegengesetzter Richtung aus dem Unendlichen zurück.

Nähert sich der Pol $x'y'z'$ mehr und mehr der ursprünglichen Fläche, so wird das Gebiet A derselben kleiner und kleiner. Fällt der Pol auf die Fläche, so erhalten wir statt des Tangentenkegels eine einzige Tangentialebene, welche die primitive Fläche im Pole berührt. Die entsprechende Schale der negativen Fusspunktfläche ist übergegangen in eine Gerade und zwar in die nach aussen gerichtete Normale der Fläche 2ten Grades, die durch den Pol hindurchgeht. Die dem Gebiete B entsprechende Schale der Fläche nähert sich asymptotisch der nach aussen gerichteten Normalen, so dass dieselbe eine trichterförmige Gestalt annimmt.

Die Gleichung der Geraden als Factor aus der Gleichung der Fläche abzuscheiden ist unmöglich. Die Fläche ist vielmehr auch jetzt noch als aus 2 Schalen bestehend anzusehen, deren eine in eine Gerade degenerirt.

Um das Uebergehen der einen Schale in eine Gerade etwas näher zu erörtern, wollen wir dasselbe an einem einfachen Beispiele, bei welchem die ausgeführten Gleichungen eine übersichtliche Form haben, erläutern.

Wir betrachten die negative Fusspunktfläche einer Ebene.

Der Pol sei Koordinatenanfang. Die Gleichung der Ebene sei

$$z + c = 0.$$

Die Gleichung der Kugel ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

Die Bedingungen der Berührung sind:

$$x = \alpha \qquad y = \beta \qquad 1 = 2\lambda(z - \gamma) \text{ also } z = \frac{1 + 2\lambda\gamma}{2\lambda}$$

$$c = -2\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Setzen wir in die letzte Gleichung und in die Gleichung der Ebene die Werthe für x y z ein, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen für λ:

$$c = -2\lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \gamma$$

$$1 + 2\lambda\gamma + 2\lambda c = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\lambda = -\frac{1}{2(c + \gamma)}.$$

Setzt man diesen Werth ein in die erste Gleichung, so erhält man:

$$c^2 + c\gamma = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - c\gamma - \gamma^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2c\gamma = c^2.$$

Die Gleichung der negativen Fusspunktfläche erhalten wir jetzt, indem wir statt

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma, \quad \frac{x}{2} \quad \frac{y}{2} \quad \frac{z}{2}$$

setzen:

$$x^2 + y^2 - 4cz = 4c^2.$$

Verlegen wir den Koordinatenanfang in den Punkt $z = -c$, d. h. in den Fusspunkt des vom Pole auf die Ebene gefällten Lothes, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$x^2 + y^2 = 4cz.$$

Die negative Fusspunktfläche ist mithin ein Rotationsparaboloid. Rotationsaxe ist die z Axe. Wir können uns diese Fläche also entstanden denken durch Rotation der Parabel $y^2 = 4cz$ um die z Axe. Wird $c = 0$, so geht diese Parabel über in die z Axe. Das elliptische Paraboloid geht also für diesen Fall über in die z Axe. c kann aber nur dann Null werden, wenn der Pol in der Ebene liegt. Wir haben also hier den analogen Fall wie vorhin. Liegt der Pol in der Ebene, so degenerirt die negative Fusspunktfläche in eine Gerade, die im Pole senkrecht auf der zu Grunde gelegten Ebene steht.

Liegt der Pol im Innern der ursprünglichen Fläche, d. h. so, dass von ihm aus kein reeller Tangentenkegel an die ursprüngliche Fläche gelegt werden kann, so ist auch die Asymptotenfläche der negativen Fusspunktfläche nicht mehr reell. Dieselbe besteht also in diesem Falle aus einer einzigen zusammenhängenden Schale, die nur dann reelle Punkte im Unendlichen besitzt, wenn die Fläche 2ten Grades sich ins Unendliche erstreckt. Für das Ellipsoid ist also in diesem Falle der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der negativen Fusspunktfläche imaginär, für die beiden Hyperboloide und den Kegel reell.

Um die Schnittkurve der unendlich fernen Ebene mit der Fläche zu untersuchen, betrachten wir die höchsten Potenzen von xyz in der Gleichung der Fläche.

Die höchsten Potenzen sind enthalten in dem Ausdruck:

$$\Omega^2 \left[\Theta^2 \Theta_1^2 + 16 \Delta \Delta_1 \Omega^2 - 4 \Delta \Theta_1^2 \Omega - 4 \Delta_1 \Theta^2 \Omega \right].$$

Die Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene besteht mithin aus der Doppelkurve $\Omega^2 = 0$ und der Kurve

$$\Theta^2 \Theta_1^2 + 16 \Delta \Delta_1 \Omega^2 - 4 \Delta \Theta_1^2 \Omega - 4 \Delta_1 \Theta^2 \Omega = 0.$$

Führen wir für die Symbole die ausgerechneten Werthe ein, so sehen wir, dass bei beliebiger Lage des Poles die Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene besteht aus dem Doppelkegelschnitt

$$x^2 a_{22} a_{33} + y^2 a_{11} a_{33} + z^2 a_{11} a_{22} = 0$$

und der Kurve 6ten Grades:

$$4\left[x^2(a_{22}+a_{33}) + y^2(a_{11}+a_{33}) + z^2(a_{11}+a_{22})\right]^2$$
$$\left[x\,a_{14}\,a_{22}\,a_{33} + y\,a_{21}\,a_{11}\,a_{33} + z\,a_{34}\,a_{11}\,a_{22}\right]^2 + 16\left[x^2+y^2+z^2\right]$$
$$\times\left[x^2 a_{22} a_{33} + y^2 a_{11} a_{33} + z^2 a_{11} a_{22}\right]^2$$
$$\times\left[a_{14}^2 a_{22} a_{33} + a_{24}^2 a_{11} a_{33} + a_{34}^2 a_{11} a_{22} - a_{44} a_{11} a_{22} a_{33}\right]$$
$$- 16\left[x^2+y^2+z^2\right]\left[x\,a_{14}\,a_{22}\,a_{33} + y\,a_{21}\,a_{11}\,a_{33} + z\,a_{34}\,a_{11}\,a_{22}\right]^2$$
$$\times\left[x^2 a_{22} a_{33} + y^2 a_{11} a_{33} + z^2 a_{11} a_{22}\right]$$
$$- 4\left[x^2(a_{22}+a_{33}) + y^2(a_{11}+a_{33}) + z^2(a_{11}+a_{22})\right]^2$$
$$\times\left[x^2 a_{22} a_{33} + y^2 a_{11} a_{33} + z^2 a_{11} a_{22}\right]$$
$$\times\left[a_{14}^2 a_{22} a_{33} + a_{24}^2 a_{11} a_{33} + a_{34}^2 a_{11} a_{22} a_{44} a_{11} a_{22} a_{33}\right] = 0.$$

Wenn der Pol mit dem Centrum der Fläche 2ten Grades zusammenfällt (wenn dieselbe ein Ellipsoid resp. Hyperboloid ist), so wird

$$a_{14} = 0 \qquad a_{24} = 0 \qquad a_{34} = 0 \text{ und mithin } \Theta_1 = 0.$$

Die Kurve besteht dann aus dem dreifach zu zählenden Kegelschnitt $\Omega = 0$ und der Kurve 4ten Grades

$$\Theta^2 - 4\,\Delta\,\Omega = 0$$

d. h.

$$\left[x^2(a_{22}+a_{33}) + y^2(a_{11}+a_{33}) + z^2(a_{11}+a_{22})\right]^2$$
$$- 4\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[x^2 a_{22} a_{33} + y^2 a_{11} a_{33} + z^2 a_{11} a_{22}\right] = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in 4 lineare Factoren von der Form

$$(a_{22}-a_{33})^{1/2} x + (a_{11}-a_{33})^{1/2} y + (a_{11}-a_{22})^{1/2} z = 0.$$

Die Kurve 4ten Grades zerfällt also in 4 gerade Linien.

Dieselben Schnittkurven erhalten wir für die negative Fusspunktfläche des Kegels, wenn der Pol im Scheitel liegt, so dass wir also folgenden Satz aussprechen können:

„Wenn der Pol mit dem Centrum der ursprünglichen Fläche 2ten Grades zusammenfällt, so besteht die Schnittkurve der negativen Fusspunktfläche mit der unendlich fernen Ebene aus einem dreifach zu zählenden Kegelschnitt und 4 geraden Linien.“

Ist endlich die ursprüngliche Fläche ein Kegel und hat der Pol eine beliebige Lage, so ist $\Delta_1 = 0$. Die Schnittkurve besteht also aus den Kurven:

$$\Omega^2 = 0 \qquad \Theta_1^2 = 0 \qquad \Theta^2 - 4\,\Delta\,\Omega = 0$$

d. h.: Die Schnittkurve besteht aus dem Doppelkegelschnitt $\Omega = 0$, der Doppelgeraden

$$\Theta_1 = x\,a_{14}\,a_{22}\,a_{33} + y\,a_{24}\,a_{11}\,a_{33} + z\,a_{34}\,a_{11}\,a_{22} = 0$$

und den 4 vorhin betrachteten Geraden.

Fassen wir alles zusammen, so haben wir also folgende Resultate gefunden:

Der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der negativen Fusspunktfläche ergiebt folgende Kurven:

a. bei beliebiger Lage des Poles

Ursprüngliche Fläche:	Schnittkurve:
Ellipsoid oder Hyperboloid	Ein Doppelkegelschnitt und eine Kurve 6ten Grades.
Kegel	Derselbe Doppelkegelschnitt, eine Doppelgerade und vier gerade Linien.

b. Der Pol liegt im Centrum.

Ellipsoid, Hyperboloid oder Kegel.	Ein dreifach zu zählender Kegelschnitt und vier gerade Linien.

§ 2. Das Verhalten im Endlichen.

Um die Gestalt der Fläche im Endlichen zu studiren, legen wir ebene Schnitte durch dieselbe.

Die gegebene Parameterdarstellung

$$x = 2\alpha - x' \qquad y = 2\beta - y' \qquad z = 2\gamma - z'$$

zeigt jedoch, dass jede ebene Kurve der negativen Fusspunktfläche einer ebenen Kurve der Fläche entspricht, die den geometrischen Ort bildet für den Mittelpunkt der Kugel, mit deren Hülfe die negative Fusspunktfläche construirt wird.

Ist diese ebene Kurve auf der letzteren Fläche eine Doppelkurve, so ist auch die entsprechende Kurve der negativen Fusspunktfläche eine Doppelkurve, denn:

Ein vielfacher Punkt der negativen Fusspunktfläche kann nur so entstanden gedacht werden, dass zweien oder mehreren Punkten der ursprünglichen Fläche ein und nur ein Punkt der negativen Fusspunktfläche entspricht. Nur in diesem Falle sind in einem Punkte der letzteren Fläche mehrere Tangentialebenen möglich, wie aus der Definition der Fläche als Enveloppe von Ebenen hervorgeht. Wir können aber die Punkte der negativen Fusspunktfläche so construirt denken, dass wir sämmtliche Punkte des Ortes der Kugelmittelpunkte mit dem Pole verbinden und diese Radienvectoren um sich selber verlängern. Entspricht also ein Punkt des Ortes der Centra der Kugel mehreren Punkten der ursprünglichen Fläche, so thut es auch der zugehörige Punkt der negativen Fusspunktfläche und letzterer ist mithin ein Doppelpunkt.

Wir betrachten zunächst den Fall, wenn der Pol im Centrum liegt. Die Parameterdarstellung nimmt die Form an:

$$\alpha = \xi\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{a^2}\right)$$

$$\beta = \eta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{b^2}\right) \qquad Q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

$$\gamma = \zeta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{c^2}\right)$$

Die negative Fusspunktfläche des Ellipsoides in Bezug auf das Centrum als Pol ist von Cayley in der bereits erwähnten Abhandlung behandelt worden. Cayley weist nach, dass die Hauptebenen der ursprünglichen Fläche die negative Fusspunktfläche je in einem Doppelkegelschnitte und einer Kurve 6ten Grades, die die negative Fusspunktfläche des entsprechenden Hauptschnittes der ursprünglichen Fläche bildet, schneiden.

Letztere wird von dem Kegelschnitt in 4 Punkten berührt.

Ausserdem ist von Cayley die Kurve auf der ursprünglichen Fläche untersucht, die der Kuspidallinie der negativen Fusspunktfläche entspricht. Dieselbe besteht aus je 2 Paaren von Ovalen, die sich um die Endpunkte der grössten und kleinsten Axe herumlegen.

Die Doppelkegelschnitte in den Hauptebenen entsprechen, wie die obigen Formeln zeigen, den Punkten der ursprünglichen Fläche, die auf den Kugeln

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2\,a^2 \text{ resp. } 2\,b^2 \text{ resp. } 2\,c^2$$

liegen.

Im Allgemeinen entsprechen den Kurven 4ter Ordnung, in denen die ursprüngliche Fläche von Kugeln mit beliebigem Radius, deren Centrum im Centrum der Fläche liegen, geschnitten wird, auf der negativen Fusspunktfläche wiederum Kurven 4ter Ordnung, deren Projectionen auf die Koordinatenebenen die Gleichungen haben:

$$\frac{x^2 a^2 (a^2 - c^2)}{2\,a^2 - k^2} + \frac{y^2 b^2 (b^2 - c^2)}{2\,b^2 - k^2} = k^2 - c^2$$

$$\frac{x^2 a^2 (a^2 - b^2)}{2\,a^2 - k^2} + \frac{z^2 c^2 (c^2 - b^2)}{2\,c^2 - k^2} = k^2 - b^2$$

$$\frac{y^2 b^2 (b^2 - a^2)}{2\,b^2 - a^2} + \frac{z^2 c^2 (c^2 - a^2)}{2\,c^2 - k^2} = k^2 - a^2.$$

Ist die ursprüngliche Fläche ein Ellipsoid, so ist die Projection auf die xy und yz Ebene eine Ellipse, die

Projection auf die x z Ebene eine Hyperbel. Bei den Hyperboloiden treten leicht zu übersehende Modificationen ein.

Wird jetzt $k = c$ resp. a oder b, so zerfällt die Projection in einer der Ebenen in 2 Gerade, die Kurve 4ten Grades also in 2 Kegelschnitte.

Die diesen Kurven 2ten Grades entsprechenden Kurven auf der ursprünglichen Fläche sind die durch das Centrum gehenden Kreisschnitte. Wir können mithin folgenden Satz aussprechen:

Liegt der Pol im Centrum der ursprünglichen Fläche, so entsprechen den 6 Kreisschnitten, deren Ebenen durch das Centrum hindurchgehen, auf der negativen Fusspunktfläche 6 Kegelschnitte. Dieselben sind reell für $k = b$, falls die ursprüngliche Fläche ein Ellipsoid ist, imaginär für $k = a$ resp. b.

Ist die primitive Fläche ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche, so entsprechen dem Werthe $k = c$ reelle Kegelschnitte; ist sie ein Hyperboloid mit 2 Mantelflächen, so sind die 6 Kegelschnitte imaginär, da die reellen Kreisschnittebenen durch das Centrum das zweischalige Hyperboloid nicht schneiden.

Wir wollen jetzt die Punkte der negativen Fusspunktfläche betrachten, die den Endpunkten eines Durchmessers der ursprünglichen Fläche entsprechen. Die Koordinaten der Endpunkte seien

$$\xi, \eta, \zeta; \quad -\xi, -\eta, -\zeta.$$

Die Koordinaten der entsprechenden Punkte der negativen Fusspunktfläche sind dann gegeben durch die Ausdrücke

$$x = \pm \xi\left(2 - \frac{Q}{a^2}\right) \quad y = \pm \eta\left(2 - \frac{Q}{b^2}\right) \quad z = \pm \zeta\left(2 - \frac{Q}{c^2}\right).$$

Die Verbindungslinie des Punktes

$$x = +\xi\left(2 - \frac{Q}{a^2}\right) \text{ etc.}$$

mit dem Centrum der ursprünglichen Fläche hat die Gleichungen:

$$\frac{x}{y} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{2a^2 - Q}{2b^2 - Q}\cdot\frac{\xi}{\eta} \qquad \frac{x}{z} = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{2a^2 - Q}{2c^2 - Q}\cdot\frac{\xi}{\zeta}.$$

Da Q quadratisch ist in $\xi\,\eta\,\zeta$, so folgt, dass diese Gerade auch durch den dem Punkte

$$-\xi, -\eta, -\zeta$$

entsprechenden Punkt der negativen Fusspunktfläche hindurchgeht.

Die Länge des nach dem ersten Punkte gezogenen Radiusvectors ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right).$$

Dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man statt

$$\xi\,\eta\,\zeta, \quad -\xi - \eta - \zeta$$

einsetzt. Die Verbindungslinie der beiden den Punkten

$$+\xi, +\eta, +\zeta, \text{ und } -\xi, -\eta, -\zeta$$

entsprechenden Punkte geht also durch das Centrum der ursprünglichen Fläche hindurch und wird in demselben halbirt.

„Das Centrum der ursprünglichen Fläche ist mithin auch anzusehen als Centrum der negativen Fusspunktfläche.“

Es bleibt noch übrig, die Frage zu entscheiden, ob die ursprüngliche Fläche von ihrer ersten negativen Fusspunktfläche geschnitten wird. Wenn dies der Fall ist, so müssen die Koordinaten x y z der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

genügen.

Setzen wir die Werthe für x y z in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$-4(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}\right)$$
$$+(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2\left(\frac{\xi^2}{a^6}+\frac{\eta^2}{b^6}+\frac{\zeta^2}{c^6}\right)=-3.$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der Fläche 2ten Grades giebt uns die Kurve, die auf der letzteren dem Schnitte der negativen Fusspunktfläche mit der ursprünglichen Fläche entspricht.

Um zu entscheiden, ob diese Kurve, die, wie man sieht, vom 8ten Grade ist, reell ist, wollen wir obige Gleichung geometrisch interpretiren.

Wir bezeichnen mit p das Loth vom Pole auf die Tangentialebene der ursprünglichen Fläche in dem entsprechenden Punkte, mit r den Radiusvector vom Pole nach demselben Punkte. Die obige Gleichung nimmt die Form an:

$$-4\frac{r^2}{p^2}+r^4\left(\frac{\xi^2}{a^6}+\frac{\eta^2}{b^6}+\frac{\zeta^2}{c^6}\right)=-3.$$

Sind $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel des Lothes, so ist

$$\xi=\frac{a^2\cos\alpha}{p} \qquad \eta=\frac{b^2\cos\beta}{p} \qquad \zeta=\frac{c^2\cos\gamma}{p}.$$

Führen wir diese Werthe ein in die Gleichung, so lautet dieselbe:

$$-4\frac{r^2}{p^2}+\frac{r^4}{p^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)=-3.$$

Den Ausdruck in der Klammer berechnen wir vermöge der Gleichungen:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$
$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma=p^2$$
$$a^4\cos^2\alpha+b^4\cos^2\beta+c^4\cos^2\gamma=r^2p^2.$$

Unsere Gleichung nimmt die Form an:

$$p^2(r^4L+3M)=r^4Q+4r^2M.$$

$$L = a^2c^2(a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - r^2) - b^2c^2(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - r^2)$$
$$- a^2b^2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - r^2)$$
$$Q = a^4c^4(a^2 - c^2) - b^4c^4(b^2 - c^2) - a^4b^4(a^2 - b^2)$$
$$M = a^2b^2c^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

$$c^2 < r^2 < a^2.$$

Hieraus folgt

$$p = r\sqrt{\frac{Qr^2 + 4M}{r^4L + 3M}}.$$

Wenn die Kurve 8ten Grades reell ist, so müssen immer Werthe von r so zu bestimmen sein, dass der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist.

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes hängt von dem Verhältniss der Axen zu einander ab. Ist die Grösse der Axen gegeben, so kann man die Grenzen bestimmen, innerhalb deren r liegen muss. Für jedes r ist dann das zugehörige p zu berechnen vermöge der abgeleiteten Formel. Jeder Punkt der Kurve ist dann construirbar als Schnittpunkt der 3 Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = p^2,$$

aus deren Gleichungen sich die Koordinaten des Punktes berechnen lassen.

Liegt der Pol nicht im Centrum der Fläche, sondern hat er eine beliebige Lage $x'y'z'$, so sind die Koordinaten des Mittelpunktes der Hülfskugel gegeben durch die Ausdrücke:

$$\alpha = \xi\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{a^2}\right)$$
$$\beta = \eta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{b^2}\right) \qquad Q = \frac{(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2}{1 - \frac{\xi x'}{a^2} + \frac{\eta x'}{b^2} + \frac{\zeta z'}{c^2}}.$$
$$\gamma = \zeta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{c^2}\right)$$

Wir erhalten einen Schnitt der z Ebene mit der Fläche, wenn wir $Q = 2c^2$ setzen. Dieser Schnitt besteht aus der Kurve

$$\alpha = \xi\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \beta = \eta\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right).$$

Diese Parameterdarstellung zeigt sofort, dass die Kurve ein Doppelkegelschnitt ist, da wir für $+\zeta$ und $-\zeta$ dieselbe Kurve erhalten, jeder Punkt derselben also 2 Punkten der ursprünglichen Fläche entspricht.

Die Gleichung dieses Kegelschnittes ist

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' - c^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Die Koordinaten des Centrums der Kurve sind:

$$\frac{x'}{a^2} \text{ und } \frac{y'}{b^2}.$$

Dieser Doppelkurve in der Ebene $z = 0$ entspricht auf der negativen Fusspunktfläche eine Kurve 2ten Grades in der Ebene $z = z'$ und zwar ist dieselbe ebenfalls eine Doppelkurve nach den vorhergegangenen Erörterungen.[1])

In derselben Weise erhalten wir je einen Doppelkegelschnitt in den Ebenen

$$x = x' \qquad y = y'.$$

Einen weiteren Schnitt der Hülfsfläche mit der Ebene $z = 0$ erhalten wir, wenn wir $\zeta = 0$ setzen. Den entsprechenden Schnitt der negativen Fusspunktfläche mit der Ebene $z = z'$ können wir auffassen als die negative Fusspunktkurve des Schnittes der x y Ebene mit der ursprünglichen Fläche, wenn wir die Definition der negativen Fusspunktkurven auch auf den Fall ausdehnen, dass der Pol ausserhalb der Ebene der ursprünglichen Fläche liegt.

---

[1]) Malet bestimmt die Doppelkurven in den Ebenen $x = x'$ $y = y'$ $z = z'$, indem er die Bedingungen aufstellt, dass eine durch den Pol gehende Kugel die ursprüngliche Fläche doppelt berührt. Dublin, Transactions 1878, pag. 456.

Die negative Fusspunktkurve ist dann nicht mehr als Enveloppe von Geraden zu definiren, sondern man muss ausgehen von der punktweisen Construction.

Man lege durch den Pol eine Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene der Kurve liegt und die die Kurve berührt, verbinde den Pol mit dem Centrum der Kugel und verlängere den Durchmesser bis zum Schnittpunkte mit der Kugel. Dieser Schnittpunkt sei dann der dem Berührungspunkte entsprechende Punkt der verallgemeinerten negativen Fusspunktkurve.

Die Gleichung dieser Kurve ergiebt sich aus der Definition derselben auf folgende Weise:

Die Gleichung der Ebene, in der die ursprüngliche Kurve gelegen ist, sei $z = c$.

Die Gleichung der primitiven Kurve sei

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0, \qquad z = c.$$

Die Gleichung der berührenden Kugel ist dann:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

Die Gleichung des Ortes des Mittelpunktes der Kugel ergiebt sich als Diskriminante einer Gleichung dritten Grades:

$$\frac{(\lambda\alpha + a_{13})^2}{\lambda - a_{11}} + \frac{(\lambda\beta + a_{23})^2}{\lambda - a_{22}} + \lambda c^2 + a_{33} = 0$$

oder in entwickelter Form:

$$\begin{aligned}\lambda^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \lambda^2\big[2(\alpha a_{13} + \beta a_{23}) - a_{22}\alpha^2 - a_{11}\beta^2 \\ - c^2(a_{11}+a_{22}) + a_{33}\big] \\ + \lambda\big[-2(a_{13}a_{22}\alpha + a_{23}a_{11}\beta) + a_{13}^2 + a_{23}^2 + c^2 a_{11}a_{22} - a_{33}(a_{11}+a_{22})\big] \\ - a_{13}^2 a_{22} - a_{23}^2 a_{11} + a_{11}a_{22}a_{33} = 0\end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$\lambda^3 \Delta + \lambda^2 \Theta + \lambda \Theta_1 + \Delta_1 = 0.$$

Die Diskriminante einer Gleichung 3ten Grades hat aber die Form:

$$\Theta^2\Theta_1^2 + 18\Delta\Delta_1\Theta\Theta_1 = 4\Delta\Theta_1^3 + 27\Delta^2\Delta_1^2 + 4\Delta_1\Theta^3.$$

Da Θ und Δ in $\alpha\beta$ vom 2ten Grade, Θ_1 vom ersten Grade sind und Δ_1 eine Konstante, so ist die Gleichung der Kurve vom 6ten Grade. Wir erhalten die Gleichung der allgemeinen negativen Fusspunktkurve, wenn wir statt $\alpha\beta$

$$\frac{x}{2} \quad \frac{y}{2}$$

einsetzen und statt $z = c$, $z \quad -2c$. Die negative Fusspunktkurve einer ebenen Kurve ist mithin auch dann vom 6ten Grade, wenn der Pol beliebig im Raum liegt.

Die zweite Schnittkurve der Ebenen

$$x = x' \qquad y = y' \qquad z = z'$$

ist mithin eine Kurve 6ter Ordnung. Die gesammte Schnittkurve ist also von der 10ten Ordnung und es ist dies Resultat eine weitere Bestätigung für die Bestimmung der Ordnungszahl der Fläche bei beliebiger Lage des Poles.

Wenn wir in der obigen Gleichung der Kurve c^2 variabel lassen gleich z^2, so stellt dieselbe die Gleichung der negativen Fusspunktfläche eines Cylinders dar.

Die Kuspidallinie der Fläche wird erhalten, wenn wir die Bedingung aufstellen, dass die Kugel, mit deren Hülfe die Fläche construirt wurde, mit der primitiven Fläche eine stationäre Berührung besitzt. In diesem Falle fallen in dem entsprechendem Punkte der negativen Fusspunktfläche 2 Tangentenebenen zusammen und der Punkt ist ein Kuspidalpunkt. Die Kugel berührt die Fläche in 2 zusammenfallenden Punkten, wenn die Gleichung in λ 3 gleiche Wurzel besitzt. Die Bedingung hierfür ergiebt 2 Gleichungen 4ten Grades in $x\,y\,z$. Die Kuspidallinie ist also von der Ordnung 16.

Die Realität der Schnittkurve der negativen Fusspunktfläche mit der ursprünglichen Fläche hängt ab von der Lage des Poles zur Fläche und dem Axenverhältniss.

Die der Schnittkurve entsprechende Kurve der primitiven Fläche kann in derselben Weise wie vorhin bestimmt werden. Sie ist ebenfalls von 8ter Ordnung.

Wenn die einander entsprechenden Punkte der ursprünglichen und ihrer negativen Fusspunktfläche zusammenfallen, so ist dies, wie aus der Construction der Fläche unmittelbar hervorgeht, nur in den Punkten möglich, in denen beide Flächen einander berühren. Die vom Pole nach diesen Punkten gezogenen Radienvectoren sind Normalen der primitiven Fläche. Da von einem beliebigen Punkte nach einer centrischen Fläche 2ten Grades im Allgemeinen 6 Normalen gezogen werden können, so berühren sich beide Flächen im Allgemeinen in 6 Punkten.

In der Dissertation von Papperitz[1]) ist nachgewiesen, dass bei dem Ellipsoid für einen Punkt innerhalb der beiden Schalen der Fläche der Centra die 6 Normalen reell sind. Liegt der Punkt ausserhalb beider Schalen, so sind nur 2 Normalen reell, liegt er auf der Innenseite der einen und der Aussenseite der andern Schale, so lassen sich 4 reelle Normalen von ihm aus an die Fläche ziehen. Wenn der Punkt auf einer Schale oder auf der beiden Schalen gemeinsamen Doppelkurve liegt, so fallen 2 resp. zweimal zwei Normalen zusammen. Hieraus folgt unmittelbar, dass unsere beiden Flächen sich in 6 resp. 2 resp. 4 reellen Punkten berühren oder dass sie in bestimmten Punkten eine Berührung höherer Ordnung haben je nach der Lage des Poles in Bezug auf die Fläche der Centra der ursprünglichen Fläche. In der Arbeit von Papperitz ist das Problem der Normalen eingehend für alle Flächen 2ter Ordnung behandelt.

---

[1]) A. Papperitz, „Ueber das Problem der kürzesten und weitesten Entfernung eines Punktes von einer Oberfläche 2ter Ordnung". Leipzig 1883.

Dritter Abschnitt.

Die nicht centrischen Flächen.

§ 1. Analytische Darstellung.

Wenn die von uns zu Grunde gelegte Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

eine nicht centrische Fläche darstellen soll, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden, d. h. es muss a_{11} oder a_{22} oder a_{33} gleich Null sein.

Wird $a_{33} = 0$, so nehmen die höchsten Potenzen der Gleichung in $\alpha\beta\gamma$ die Form an:

$$\Omega^2 \Big\{ 4\left[\alpha^2 a_{22} + \beta^2 a_{11} + \gamma^2 (a_{11} + a_{22})\right]^2 \gamma^2 a_{11}^2 a_{22}^2 a_{34}^2 + 16\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right]\left[\gamma^4 a_{11}^2 a_{22}^3 a_{34}^2 - \gamma^4 a_{34}^2 a_{11}^3 a_{22}^3\right] - 4\left[\alpha^2 a_{12} + \beta^2 a_{11} + \gamma^2 (a_{11} + a_{22})\right]^2 \gamma^2 a_{34}^2 a_{11}^2 a_{22}^2 \Big\}$$

In der Klammer heben sich die mittleren Glieder und das erste und letzte Glied einander auf. Die Potenzen 10ten Grades verschwinden. Die Gleichung in $\alpha\beta\gamma$ ist mithin nur vom Grade 9.

Die Ordnung der negativen Fusspunktfläche einer nicht centrischen Fläche 2ter Ordnung ergiebt sich also gleich 9, wenn der Pol in Bezug auf die Fläche eine be-

liebige Lage hat. Dieses Resultat stimmt mit demjenigen überein, das uns die allgemeinen Formeln für die Ordnungszahl der Fläche angab.

Der Grad der Gleichung in Ebenenkoordinaten in u v w wird durch das Verschwinden von a_{33} nicht geändert. Die Klasse ist also auch in diesem Falle gleich 4, wie auch die allgemeine Formel angiebt.

Gehen wir aus von der Form der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{2\zeta}{c},$$

so nimmt, wenn $x'y'z'$ die Koordinaten des Poles sind, die Parameterdarstellung folgende Form an:

$$x = \xi\left(2 - \frac{Q}{a^2}\right) - x'$$

$$y = \eta\left(2 - \frac{Q}{b^2}\right) - y' \qquad Q = \frac{(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2}{\frac{\zeta}{c} - \left(\frac{x'\xi}{a^2} + \frac{y'\eta}{b^2} - \frac{z'}{c}\right)}$$

$$z = \zeta\left(2 + \frac{Q}{c\,\zeta}\right) - z'$$

Mit Hülfe derselben untersuchen wir die Gestalt der Fläche.

§ 2. Die Gestalt der Fläche.

Im Nenner des Ausdruckes Q steht ein Ausdruck, der die Form der linken Seite der Gleichung der Polarebene des Poles in Bezug auf die primitive Fläche besitzt. Dem Schnitt der Polarebene mit der Fläche 2ten Grades entsprechen also unendlich ferne Punkte der negativen Fusspunktfläche. Lässt sich vom Pole aus ein reeller Tangentenkegel an die ursprüngliche Fläche legen, so besteht also die abgeleitete Fläche aus 2 Schalen, von denen sich jede ins Unendliche erstreckt. Die abwickelbare Fläche, deren Ebenen senkrecht stehen auf den Erzeugenden des Tangentenkegels, ist Asymptotenfläche der negativen Fusspunktfläche. Da die nicht centrischen Flächen sich ins Unendliche erstrecken, so besitzen ihre negativen Fuss-

punktflächen stets reelle Punkte im Unendlichen, wo auch der Pol liegen mag. Wir finden die Schnittkurve der Fläche mit der unendlich fernen Ebene, wenn wir die höchsten Potenzen der Gleichung in x y z gleich Null setzen. Die so resultirende Gleichung hat die Form:

$$(5\,A\,A_1\,C - A\,B_1^2 - A_1\,B^2)\,C\,B\,B_1 = 0$$

$$A = x^2 + y^2 + z^2$$

$$A_1 = a_{11}\,a_{22}\,a_{34}^2$$

$$B = -(x^2\,a_{22} + y^2\,a_{11} + z^2\,(a_{11} + a_{22}))$$

$$B_1 = 2\,z\,a_{34}\,a_{11}\,a_{22}$$

$$C = z^2\,a_{11}\,a_{22}.$$

Die Schnittkurve der unendlich fernen Ebene mit der Fläche besteht mithin aus folgenden Kurven:

1. Eine Kurve 4ter Ordnung

$$z^2(x^2+y^2+z^2)\,a_{11}\,a_{22} - [x^2\,a_{22} + y^2\,a_{11} + z^2\,(a_{11}+a_{22})]^2 = 0.$$

2. Aus dem Kegelschnitt:

$$x^2\,a_{22} + y^2\,a_{11} + z^2\,(a_{11} + a_{22}) = 0.$$

3. Aus der dreifach zu zählenden Kurve $z = 0$, d. h. der Schnitt der x y Ebene mit der unendlich fernen Ebene ist eine 3fach zählende gerade Linie der Fläche.

Besonderes Interesse bietet der Fall, dass der Pol im Scheitel der ursprünglichen Fläche liegt. Die Parameterdarstellung nimmt die Form an:

$$x = \xi\left(2 - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\zeta}\,\frac{c}{a^2}\right)$$

$$y = \eta\left(2 - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\xi}\,\frac{c}{b^2}\right)$$

$$z = \zeta\left(2 + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\zeta^2}\right).$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt an, dass die Fläche symmetrisch liegt in Bezug auf die x y und y z Ebene, da

für denselben Werth von ζ x und y denselben numerischen Werth behalten, wenn man statt

$$+\xi+\eta+\zeta,\ -\xi-\eta-\zeta$$

setzt, und nur ihre Vorzeichen sich ändern.

Legen wir durch den Scheitel eines Paraboloids eine Kugel, die dasselbe im Scheitel berührt, so ist die Gleichung derselben

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=2\,k\,\zeta.$$

Für die der Schnittkurve dieser Kugel mit der ursprünglichen Fläche entsprechenden Punkte der negativen Fusspunktfläche erhalten wir die Ausdrücke:

$$x=\xi\left(2-\frac{2\,k\,c}{a^2}\right)\qquad y=\eta\left(2-\frac{2\,k\,c}{b^2}\right)\qquad z=\zeta\left(2-\frac{2\,k}{\zeta}\right)$$

und mithin

$$\xi=\frac{a^2\,x}{2\,(a^2-k\,c)}\qquad \eta=\frac{b^2\,y}{2\,(b^2-k\,c)}\qquad \zeta=\frac{z-2\,k}{2}.$$

Setzen wir diese Werthe ein in die Gleichungen der Kugel und der ursprünglichen Fläche, so erhalten wir:

$$\frac{x^2\,a^4}{4\,(a^2-k\,c)^2}+\frac{y^2\,b^4}{4\,(b^2-k\,c)^2}+\frac{(z-2\,k)^2}{4}=k\,(z-2\,k)$$

$$\frac{x^2\,a^2}{4\,(a^2-k\,c)^2}+\frac{y^2\,b^2}{4\,(b^2-k\,c)^2}=\frac{z-2\,k}{c}.$$

Die Projectionen dieser Schnittkurve auf die x z und y z Ebene sind Parabeln. Die Projection auf die x y Ebene hat die Gleichung:

$$\frac{x^2\,a^2}{a^2-k\,c}+\frac{y^2\,b^2}{b^2-k\,c}+\frac{c^2}{16}\left(\frac{x^2\,a^2}{(a^2-k\,c)^2}+\frac{y^2\,b^2}{(b^2-k\,c)^2}\right)^2=0.$$

Diese Gleichung 4ten Grades zerfällt für $a=b$ in die beiden Factoren:

$$\left(x^2+\frac{(a^2-k\,c)^3}{(b^2-k\,c)^3}\frac{b^2}{a^2}\,y^2+\frac{(a^2-k\,c)^3}{a^2\,c^2}\,16\right)$$

$$\times\left(x^2+\frac{a^2-k\,c}{b^2-k\,c}\frac{b^2}{a^2}\,y^2\right)=0.$$

Die Gleichung 4ten Grades zerfällt also in 2 gerade Linien und einen Kegelschnitt. Die entsprechende Raumkurve zerfällt also in eine Kurve 4ten Grades und 2 Kegelschnitte, wenn die ursprüngliche Fläche eine Rotationsfläche ist.

Ist

$$k = \frac{a^2}{c},$$

so ist die Gleichung der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2\,a^2}{c}\,\zeta.$$

Die entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche liegen also auf den durch den Scheitel gehenden Kreisschnitten.

Die Gleichung der Kurve auf der negativen Fusspunktfläche nimmt die Form an $x = 0$

$$\frac{y^2\,b^2}{(a^2 - b^2)\,a^2} - \frac{(z\,c - 2\,a^2)^2}{c^2} = 0.$$

und dies sind die Gleichungen zweier Geraden in der y z Ebene.

Analog erhalten wir, den Kreisschnitten

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2\,b^2}{c}\,\zeta$$

entsprechend, zwei Gerade in der x z Ebene. Diese Geraden sind Doppelgerade, da für $+\xi$ und $-\xi$ ihre Gleichung ungeändert bleibt, jeder ihrer Punkte also 2 Punkten der ursprünglichen Fläche entspricht.

Wir können jetzt folgenden Satz aussprechen:

„Den Kreisschnitten der nicht centrischen Flächen durch den Scheitel entsprechen auf ihren negativen Fusspunktflächen je 2 gerade Linien in der x z und 2 gerade Linien in der y z Ebene. Im Falle die ursprüngliche Fläche ein elliptisches Paraboloid ist, sind die Geraden in der y z Ebene reell, die in der x z Ebene imaginär. Ist die ursprüngliche Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, so sind die 4 Geraden imaginär.“

Das gefundene Resultat stimmt überein mit den betreffs der Existenz gerader Linien auf den negativen Fusspunktflächen später abzuleitenden Sätzen.

Den Schnitt der Fläche mit der z Ebene würden wir erhalten, wenn wir

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = -2\zeta^2$$

setzen. Auf der linken Seite dieser Gleichung stehen nur positive Grössen, auf der rechten Seite nur negative Grössen. Die negative Fusspunktfläche schneidet mithin die x y Ebene nicht, ausgenommen im Punkte

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0.$$

Ausser den beiden Doppelgeraden besteht der Schnitt der x z resp. y z Ebene mit der negativen Fusspunktfläche noch aus der negativen Fusspunktkurve des betreffenden Hauptschnittes der ursprünglichen Fläche, wie unmittelbar ersichtlich ist.

Auf die Discussion dieser Kurve soll etwas näher eingegangen werden:

Die Gleichung der negativen Fusspunktkurve der Parabel leiten wir in derselben Weise ab wie die Gleichung der negativen Fusspunktfläche. Statt der Hülfskugel gebrauchen wir jetzt einen Hülfskreis, dessen Gleichung ist

$$\xi^2 + \eta^2 - 2(\alpha\xi + \beta\eta) = 0.$$

Die Gleichung der Parabel in der y z Ebene ist

$$\eta^2 = \frac{2b^2}{c}\zeta = 2p\zeta.$$

Die Bedingung der Berührung ist

$$\eta = \lambda(\eta - \beta) \qquad -p = \lambda(\zeta - \gamma) \qquad p\zeta = \lambda(\beta\eta + \gamma\zeta)$$

$$\eta = \frac{\lambda\beta}{\lambda - 1} \qquad \zeta = \frac{\lambda\gamma - p}{\lambda}.$$

Setzen wir diese Werthe ein in die Gleichung

$$p\zeta = \lambda(\beta\eta + \gamma\zeta)$$

und die Gleichung der Parabel, so erhalten wir:

$$1.\quad \frac{\lambda^2\beta^2}{\lambda-1}+\frac{(\lambda\gamma-\mathrm{p})^2}{\lambda}=0$$

$$2.\quad \frac{\lambda^2\beta^2}{(\lambda-1)^2}-\frac{2\,\mathrm{p}\,(\lambda\gamma-\mathrm{p})}{\lambda}=0$$

Hieraus folgt:

$$3.\quad (\lambda\gamma-\mathrm{p})\,[(\lambda-1)\,2\,\mathrm{p}+\lambda\gamma-\mathrm{p}]=0.$$

Die Gleichung 3 ist erfüllt durch

$$\lambda\gamma-\mathrm{p}=0$$

und hieraus folgt

$$\lambda=\frac{\mathrm{p}}{\gamma}.$$

Durch diesen Werth von λ werden die Gleichungen 1 und 2 identisch erfüllt, wenn zu gleicher Zeit $\beta=0$ ist. λ kann mithin jeden beliebigen Werth annehmen und folglich auch

$$\gamma=\frac{\mathrm{p}}{\lambda},$$

d. h. die z Axe ist in ihrer ganzen Ausdehnung als zur Kurve gehörig zu betrachten. Wenn aber die z Axe zu den Schnittkurven der Hauptebenen mit der negativen Fusspunktfläche gehört, so liegt dieselbe auch ganz auf der Fläche. Es bestätigt sich also das im ersten Abschnitt abgeleitete Resultat, dass, wenn der Pol auf der ursprünglichen Fläche liegt, die Normale derselben im Pole in ihrer ganzen Ausdehnung als zur Fläche gehörig zu betrachten ist.

Der zweite Factor der Gleichung 3 ergiebt für λ den Werth

$$\lambda=\frac{3\,\mathrm{p}}{\gamma+2\,\mathrm{p}}.$$

Setzen wir denselben in Gleichung 1 ein, so erhalten wir die Gleichung der Kurve:

$$27\,\mathrm{p}^3(\beta^2+\gamma^2)-9\,\mathrm{p}^2\,(\gamma+2\,\mathrm{p})^2\,\gamma+3\,(2\,\gamma+\mathrm{p})\,(\gamma+2\,\mathrm{p})\,\mathrm{p}+\mathrm{p}^2=0.$$

Dieselbe ist vom 3ten Grade. Rechnen wir die Normale im Scheitel nicht mit, so ist die Schnittkurve der y z Ebene mit der Fläche vom 7ten Grade. Dieses Resultat stimmt mit dem allgemein abgeleiteten Resultate, dass die Ordnung der negativen Fusspunktfläche einer nicht centrischen Fläche, wenn der Pol auf der ursprünglichen Fläche liegt, gleich 7 ist, überein, da bei der allgemeinen Ableitung die Gerade nicht mitgezählt war.

Die vielfachen Punkte der Kurve ergeben sich leicht aus der Parameterdarstellung:

$$y = \eta\left(2 - \frac{\xi^2+\eta^2}{p\zeta}\right),\quad z = \zeta\left(2 + \frac{\xi^2+\eta^2}{\zeta^2}\right).$$

Die Doppelpunkte in der z Axe entsprechen den Punkten der Parabel, für welche

$$\xi^2+\eta^2 = 2p\zeta \text{ ist, d. h. } \zeta^2 = 0;\ \xi = 0,\ \eta = 0.$$

Die Doppelpunkte in der y Axe entsprechen den Punkten:

$$\eta^2 + \zeta^2 = -2\zeta^2 \qquad \eta^2 = -3\zeta^2$$

d. h. diese Doppelpunkte sind imaginär.

Die entsprechenden Punkte der Parabel sind:

$$\xi = 0 \qquad \xi = -\frac{2}{3}p$$

$$\eta = 0 \qquad \eta = \frac{2}{3}p\sqrt{-3}$$

Im Scheitel fallen mithin 3 Doppelpunkte zusammen.

Die Kuspidalpunkte ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\zeta^2 + 2p\zeta &= 0\\ \eta^2 &= 2p\zeta\end{aligned}\right\} \text{ d. h.}$$

die entsprechenden Punkte der Parabel sind

$$\zeta = 0 \qquad \zeta = -2p$$

$$\eta = 0 \qquad \eta = \pm p\sqrt{-1}.$$

Die Kuspidallinie der Fläche entspricht dem Schnitte der Fläche 4ten Grades:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2\frac{c^2}{a^2b^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\left(\frac{c}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{2\zeta^2c^2}{a^2b^2}\right)\zeta$$
$$+2\left(\frac{\zeta^4c}{a^2}+\frac{\zeta^3c}{a^2}+\frac{2\xi^2\zeta^2c^2}{a^2b^2}+\frac{\eta^2c^2\zeta^2}{a^2b^2}\right)$$

mit der ursprünglichen Fläche. Diese Schnittkurve ist vom 8ten Grade und geht durch den Scheitel der ursprünglichen Fläche hindurch.

Wenn der Pol eine beliebige Lage hat, so ergeben sich Doppelkegelschnitte in den Ebenen

$$x=x' \quad y=y',$$

die den Punkten der ursprünglichen Fläche entsprechen, die auf der Kugel

$$(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2=2k^2\left(\frac{\zeta}{c}-\frac{x'\xi}{a^2}-\frac{y'\eta}{b^3}+\frac{z'}{c}\right)$$

liegen, wo k im ersten Falle gleich a, im zweiten gleich b ist.

Der übrige Schnitt mit diesen Ebenen besteht aus der negativen Fusspunktkurve des entsprechenden Hauptschnittes der primitiven Fläche, wenn wir die Definition der negativen Fusspunktkurve auf den Fall erweitern, dass der Pol ausserhalb der Ebene der Kurve liegt.

Die Ordnung dieser negativen Fusspunktkurve ist gleich 5, so dass die gesammte Schnittkurve von der Ordnung 7 ist.

Vierter Abschnitt.

Die Geraden der Fläche.

Um zu untersuchen, ob es möglich ist, dass auf der negativen Fusspunktfläche gerade Linien existiren, wollen wir diejenigen Kurven bestimmen, die auf der ursprünglichen Fläche den Geraden der negativen Fusspunktfläche entsprechen müssen. Wenn auf einer Fläche gerade Linien liegen, so gehen die Tangentialebenen der Fläche in Punkten, die auf einer der Geraden liegen, durch dieselbe hindurch. Die ursprüngliche Fläche ist nun die positive Fusspunktfläche ihrer negativen Fusspunktfläche. Denkt man sich alle Tangentialebenen construirt der Punkte einer auf der negativen Fusspunktfläche liegenden Geraden, so ist die ihr entsprechende Kurve auf der ursprünglichen Fläche der Ort der Fusspunkte der vom Pole auf diese Tangentialebenen gefällten Lothe. Diese Lothe liegen aber alle in einer Ebene, nämlich in der Ebene, die man durch den Pol senkrecht zur Geraden auf der negativen Fusspunktfläche legt. Wir haben also folgenden Satz:

„Wenn auf der negativen Fusspunktfläche eine Gerade liegen soll, so muss die ihr entsprechende Kurve auf der ursprünglichen Fläche eine ebene Kurve sein.“

Die Fusspunkte der vom Pole auf die Tangentialebenen gefällten Senkrechten müssen aber sämmtlich auf einem Kreise liegen, der durch den Pol geht und den Schnittpunkt der oben definirten Ebene mit der Geraden, und dessen Mittelpunkt der Halbirungspunkt ist der Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

Hieraus folgt als zweites Resultat:

„Wenn auf der negativen Fusspunktfläche eine Gerade existirt, so muss die ihr entsprechende Kurve auf der ursprünglichen Fläche ein Kreis sein, der durch den Pol geht. Die Ebene dieses Kreises muss senkrecht auf der Geraden der Fläche stehen."

Die zuletzt ausgesprochene Bedingung kann nur dann erfüllt sein, wenn der Pol auf der ursprünglichen Fläche liegt. Nur in diesem Falle ist es möglich, dass gerade Linien auf der negativen Fusspunktfläche liegen.

Die Zahl derselben ist beschränkt. Da sich durch einen Punkt einer Fläche 2ten Grades nur 2 reelle und 4 imaginäre Kreisschnitte legen lassen, so kann die Zahl der Geraden auf der negativen Fusspunktfläche höchstens gleich 6 sein, wovon 2 reell und 4 imaginär sind, abgesehen von den Geraden, die im Unendlichen liegen.

Aus dem oben Ausgeführten ergiebt sich ohne Weiteres, dass jede dieser Geraden durch den zweiten Endpunkt des Durchmessers des entsprechenden Kreises durch den Pol gehen und senkrecht auf der Ebene dieses Kreises stehen muss.

Dass die auf diese Weise definirten Geraden wirklich auf der Fläche liegen, ist noch nicht nachgewiesen. Um dies zu zeigen, muss untersucht werden, ob sich bei der punktweisen Construction der Fläche diese geraden Linien ergeben.

Dass dies der Fall ist, wird auf folgende Weise bewiesen:

Wenn die definirten Geraden auf der negativen Fusspunktfläche liegen, so müssen die ihnen entsprechenden Punkte auf der Fläche, die den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Hülfskugeln bilden, ebenfalls auf geraden Linien liegen und zwar auf Geraden, die durch die Mittelpunkte der den Geraden der negativen Fusspunktfläche auf der ursprünglichen Fläche entsprechenden Kreise gehen und senkrecht auf den Ebenen dieser Kreise stehen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist unmittelbar

ersichtlich, da die entsprechenden Punkte des Ortes der Centra der Kugeln die Halbirungspunkte sind der vom Pole nach den Punkten der negativen Fusspunktfläche gezogenen Radienvectoren.

Liegt umgekehrt auf der Hülfsfläche eine Gerade, so entspricht ihr eine ihr parallele Gerade auf der negativen Fusspunktfläche.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass gerade Linien der besprochenen Art auf der Hülfsfläche liegen:

Wenn die Behauptung richtig ist, so müssen die Normalen der ursprünglichen Fläche längs eines Kreisschnittes die Gerade schneiden, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht und senkrecht steht auf der Ebene des Kreisschnittes. Dies ist in der That der Fall, denn:

Wir denken uns in einem beliebigen Punkte des Kreises die Tangente construirt und legen durch den Mittelpunkt und den Berührungspunkt der Tangente eine Ebene senkrecht zur Ebene des Kreisschnittes. Die Tangente steht senkrecht auf dieser Ebene. Die Flächennormale im besprochenen Punkte steht senkrecht auf der Tangente und muss folglich in dieser Ebene liegen.

Mithin muss die Flächennormale die oben definirte Gerade schneiden.

Es soll jetzt das Problem noch einmal analytisch behandelt werden:

1. Es soll der Ort eines Punktes bestimmt werden der Art, dass die auf den Verbindungslinien des gesuchten Ortes mit einem festen Punkte dem Pole, in den Punkten des Ortes senkrecht errichteten Ebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen.

Die Gleichungen der Geraden seien:

$$u\,x + v\,y + 1 = 0$$
$$l\,x + m\,z + 1 = 0,$$

$\xi\ \eta\ \zeta$ seien die Koordinaten der Punkte des gesuchten Ortes. Der Pol sei Anfangspunkt der Koordinaten. Die

Gleichung der auf den Radienvectoren senkrecht stehenden Ebene ist:

$$x\xi + y\eta + z\zeta - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0.$$

Die Bedingung, dass diese Ebene durch die obige Gerade hindurchgeht, ist, dass die Unterdeterminanten in dem System von drei Gleichungen verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ u & v & 0 \\ l & 0 & m \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \eta & \zeta & -(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ v & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt geben diese beiden Determinanten:

$$1.\quad m v \xi - m n \eta - v l \zeta = 0$$

$$2.\quad m\eta + v\zeta + m v(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0.$$

Die erste Gleichung ist die Gleichung einer Ebene, die senkrecht steht auf der Geraden. Die zweite Gleichung ist die Gleichung einer Kugel, die durch den Pol hindurchgeht.

Hiermit sind die beiden ersten Resultate auch analytisch bestätigt.

Es bleibt nur noch übrig, die letzte Behauptung analytisch zu beweisen: Die Normalen einer Fläche 2ter Ordnung längs eines Kreisschnittes schneiden die im Mittelpunkte des Kreises senkrecht auf der Ebene desselben errichtete Gerade.

Beweis:

Die Gleichung einer beliebigen Kreisschnittebene ist

$$x c \sqrt{a^2 - b^2} + z a \sqrt{b^2 - c^2} - k c \sqrt{a^2 - b^2} = 0.$$

Die Gleichung der oben definirten Geraden ist für den vorgelegten Kreisschnitt:

$$1.\quad x a \sqrt{b^2 - c^2} + z c \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{k(a^2 - b^2)\sqrt{b^2 - c^2}}{a} = 0$$

$$y = 0$$

Die Gleichung der Normale im Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$

$$2\begin{cases} x\,a^2\eta - y\,b^2\xi - \xi\,\eta\,(a^2-b^2) = 0 \\ x\,a^2\zeta - z\,c^2\xi - \xi\,\zeta\,(a^2-c^2) = 0 \end{cases}$$

Wir stellen jetzt die Frage folgendermassen:

Welches ist der Ort derjenigen Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ der Fläche 2ten Grades, für welche die Normalen durch die Gerade 1 hindurchgehen. Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante des Systems von 4 Gleichungen 1 und 2. Diese Determinante gleich Null gesetzt, giebt uns also die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\begin{vmatrix} a^2\eta & -b^3\xi & 0 & -\xi\,\eta\,(a^2-b^2) \\ a^2\zeta & 0 & -c^2\xi & -\xi\,\zeta\,(a^2-c^2) \\ a\sqrt{b^2-c^2} & 0 & -c\sqrt{a^2-b^2} & -\dfrac{k\,(a^2-b^2)\sqrt{b^2-c^2}}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt giebt diese Determinante:

$$x\,c\sqrt{a^2-b^2} + z\,a\sqrt{b^2-c^2} - c\,k\sqrt{a^2-b^2} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung des Kreisschnittes, durch dessen Mittelpunkt die Gerade 1 hindurchgeht.

Hiermit ist also die Behauptung bewiesen. Fassen wir alles zusammen, so können wir also folgenden Satz aussprechen:

„Die erste negative Fusspunktfläche besitzt dann und nur dann gerade Linien im Endlichen, wenn der Pol auf der ursprünglichen Fläche liegt. Ist dies der Fall, so besitzt die Fläche 6 Gerade, 2 reelle, 4 imaginäre, entsprechend den Kreisschnitten, die man durch einen Punkt der ursprünglichen Fläche legen kann. Die Construction derselben ist gegeben, indem man eine Senkrechte errichtet auf der Ebene des betreffenden Kreisschnittes in dem 2ten Endpunkte des durch den Pol gehenden Durchmessers.“

Betrachten wir jetzt die Flächen 2ten Grades als die negativen Fusspunktflächen ihrer positiven Fusspunktflächen, so ergiebt sich aus dem oben Abgeleiteten eine einfache Construction der ersten positiven Fusspunktfläche einer Fläche 2ten Grades:

Die Flächen zweiter Ordnung sind Regelflächen. Die Erzeugenden sind reell bei dem Hyperboloid mit einer Mantelfläche und dem hyperbolischen Paraboloide. Der Pol der ersten negativen Fusspunktfläche liegt auf der Fläche. Nach dem Vorigen muss jeder Geraden der Fläche 2ter Ordnung ein Kreisschnitt auf der ersten positiven Fusspunktfläche entsprechen, der durch den Pol geht und dessen Ebene senkrecht auf der Geraden steht.

Die positive Fusspunktfläche kann also auf folgende Weise construirt gedacht werden:

„Man lege durch den Pol Ebenen senkrecht zu den Geraden der Fläche 2ter Ordnung und construire Kreise, die durch den Pol gehen, und durch die Schnittpunkte der Ebenen mit den Geraden. Die Mittelpunkte dieser Kreise sollen die Halbirungspunkte der Verbindungslinie dieser beiden Punkte sein. Durch diese Kreise wird die erste negative Fusspunktfläche erzeugt.

Zum Schlusse möge es mir gestattet sein, Herrn Professor Dr. Krause für die Anregung und Herrn Professor Dr. Staude für die Theilnahme am Verlaufe meiner Arbeit meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.